هم کلاسی

Hamkelasi.ir

فصل سوم (مشتق و کاربردهای آن)

فصل سوم: مشتق و کاربردهای آن

آهنگ متوسط تغییر: آهنگ متوسط تغییر تابع f از نقطه a تا b از دامنه آن برابر کسر است. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

تست۱: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۳۶}{x^۲}$، آهنگ متوسط تابع از $x_۱=۲$ تا $x_۲=۳$ چقدر از آهنگ لحظه‌ی آن در $x=\sqrt[۳]{۱۲}$ بیشتر است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

تعریف مشتق(آهنگ آنی یا لحظه‌ای تغییر): اگر تابع f در همسایگی نقطه $x=a$ تعریف شده باشد، مشتق تابع f در نقطه $x=a$ که با نماد $f'(a)$ نشان می‌دهیم، را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

اگر حد بالا وجود داشته باشد، می گوییم تابع f در $x=a$ مشتق پذیر است.

مثال۱: به کمک تعریف، مشتق توابع زیر را در $x=a$ بیابید. $f(x)=۲x+۱$,$f(x)=\frac{۱}{x}$

تست۲: اگر $\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=۳x$ ، حاصل $\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x^۲-۹}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۹

نکته۱: اگر تابع f در نقطه $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، داریم: $\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h}=(m-n)f'(a)$.

تست۳: حد کدام‌یک از کسرهای زیر وقتی $\Delta x\to ۰$، برابر $f'(x)$ است؟

۱) $\frac{f(x+۲\Delta x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$ ۲) $\frac{f(x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x}$

۳) $\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$ ۴) $\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{۲\Delta x}$

تست۴: اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2$ ، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-2h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) -2 ۴) -4

تست۵: اگر $f'(2)=5$، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f^2(2+3h)-f^2(2-h)}{(h^2-h)f(2)}$ کدام است؟ الف) -40 ب) ۲۰ ج) ۱۰ د) ۵

نکته۲: اگر $h(x)=f(x)g(x)$ و $f(a)=0$، داریم: $h'(a)=f'(a)g(a)$.

تست۶: اگر $f(x)=\frac{x+\sqrt{2x}}{x-1}\cot\frac{\pi}{x}$، حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) $\frac{-\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

تست۷: اگر $f(x)=\begin{cases}x-1 & x>0\\ x^2 & x\le 0\end{cases}$، آنگاه حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(x^2+1+h)-f(x^2+1)}{h}$ کدام است؟

۱) x^2 ۲) $2(x^2+1)$ ۳) $(x^2+1)^2$ ۴) ۱

تست۸: اگر $f(x)=x^2-x\,,\,g(x)=\sqrt{2x}$، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)g(2+h)-f(2)g(2)}{h}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

نکته۳: به عبارت $f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ مشتق راست و به عبارت $f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ مشتق راست تابع f در نقطه $x=a$ می گوییم.

تست۹: در تابع با ضابطه $f(x)=x\sqrt{x}+|x-1|$، مقدار $f'_+(1)+3f'_-(1)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

تست۱۰: اگر $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$، $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)-f(0)}{h^2}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

تست۱۱: اگر $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+4 & ,x<1 \\ x^3-\sqrt{x} & ,x\ge 1\end{cases}$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$ کدام است؟

محاسبه مشتق توابع:

فرمول های زیر را برای محاسبه مشتق توابع داریم:

الف)مشتق توابع ثابت: مشتق توابع ثابت صفر می باشد. یعنی: $f(x)=c\Rightarrow f'(x)=0$

ب)مشتق تابع $f(x)=x^n$: بصورت مقابل است: $f(x)=x^n\Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

مثال۲: مشتق توابع زیر را بیابید.

$$f(x)=x^5\Rightarrow f'(x)= \quad , \quad f(x)=\sqrt{x}= \quad \Rightarrow f'(x)=$$

پ)مشتق جمع و تفریق توابع: اگر توابع f و g در نقطه $x=a$ مشتق پذیر باشند، تابع $f\pm g$ نیز در این نقطه مشتق پذیر است و داریم: $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

مثال۳: مشتق توابع زیر را بیابید.

$$f(x)=x^5+3x-2\Rightarrow f'(x)= \quad , \quad f(x)=\sqrt[3]{x}+x^3= \quad \Rightarrow f'(x)=$$

نکته۴: در حالت کلی داریم: $y=kx^n\Rightarrow y'=knx^{n-1},\quad y=kx\Rightarrow y'=k$

مثال۴: $f(x)=2x^3-\dfrac{x}{5}+2\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=$

نکته۵: اگر $y=f^n$، آن گاه داریم: $y'=nf^{n-1}f'$.

مثال۵: $y=(x^5-3x)^5\Rightarrow y'=$, $y=(7x-x^2)^3\Rightarrow y'=$

تست۱۲: اگر $y=\sqrt[5]{x^3-2x}$ ، آن گاه حاصل $5y'y^4$ کدام است؟

۱) $-5(3x^2-2)\sqrt[5]{(x^3-2x)^4}$ ۲) $2-3x^2$

۳) $3x^2-2$ ۴) $5(3x^2-2)\sqrt[5]{(x^3-2x)^4}$

ت)مشتق ضرب توابع: اگر توابع f و g در نقطه $x=a$ مشتق پذیر باشند، تابع fg نیز در این نقطه مشتق پذیر است و داریم:

$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

مثال۶: مشتق توابع زیر را بیابید.

$$y=(7x+1)(x^3-x^2)\Rightarrow y'=$$

$$y=7x(4x-1)^2\Rightarrow y'=$$

تست۱۳: اگر $f(x)=x-\sqrt{x^2-x}\,,\,g(x)=x+\sqrt{x^2-x}$، حاصل $f'(9)g(9)+f(9)g'(9)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{3}$

مثال۷: اگر $f(x)=\cos x\cos 2x\cos 4x$ باشد، حاصل $\cos x f(x)+\sin x f'(x)$ را بیابید.

ث)مشتق تقسیم توابع: اگر توابع f و g در نقطه $x=a$ مشتق پذیر باشند، تابع $\frac{f}{g}$ نیز در این نقطه مشتق پذیر است و داریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

مثال۸: مشتق توابع زیر را بیابید.

$$y=\frac{x}{2x+1}\quad ,y=\frac{3-x^2}{2x}$$

ج)مشتق توابع رادیکالی: اگر $y=\sqrt{f}$، آن گاه داریم: $y'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

مثال۹: $y=3\sqrt{2x-x^2}\Rightarrow y'=$, $y=\sqrt{x^3-1}\Rightarrow y'=$

نکته۶: در حالت کلی داریم: $\left(\sqrt[m]{u^n}\right)'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$.

مثال۱۰: $\left(\sqrt[3]{(3x-1)^2}\right)'=$ $\left(\sqrt[5]{(x^2+4x)^3}\right)'=$

چ)مشتق توابع مثلثاتی: مشتق توابع مثلثاتی با استفاده از فرمول های زیر محاسبه می شوند:

$$y=\sin u\Rightarrow y'=u'\cos u,\quad y=\cos u\Rightarrow y'=-u'\sin u$$

$$y=\tan x\Rightarrow y'=u'\left(1+\tan^2 u\right),\quad y=\cot u\Rightarrow y'=-u'(1+\cot^2 u)$$

مثال۱۱: مشتق بگیرید.

$$y=\sin 5x\Rightarrow y'=\quad ,\quad y=3\cos\sqrt{x+5}\Rightarrow y'=$$

$$y=\tan\left(5x-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow y'=\quad ,\quad y=\sin^3(4x)\Rightarrow y'=$$

$y = ۳\sin x\cos x \Rightarrow y' =$, $y = \dfrac{\tan x}{\cos x} \Rightarrow y' =$

قاعده زنجیری:

قضیه: فرض کنید تابع g در نقطه x و تابع f در نقطه $g(x)$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه تابع مرکب fog در نقطه x مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

به عبارت دیگر اگر داشته باشیم $y = f(u)$ که در آن $u = g(x)$ باشد در آن صورت داریم: $y'_x = f'_u u'_x$ یا به عبارتی $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$.

مثال۱۲: مشتق $y = \sqrt{x^۴ - ۳x}$ را به کمک قاعده زنجیری بیابید.

مثال۱۳: مشتق بگیرید. $۱)\ y = \sin(x^۳)\ ,\ ۲)\ y = \cos^۳ x\ ,\ ۳)\ y = \sin^۳(۴x - ۱)$

تست۱۴: اگر مشتق تابع f(x) برابر با $\dfrac{۱}{x}$ باشد آن مشتق تابع $f(ax)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{x}$ ۲) $\dfrac{a}{x}$ ۳) $\dfrac{۱}{ax}$ ۴) $\dfrac{a^۲}{x}$

تست۱۵: اگر مشتق تابع f(x) برابر با tanx باشد آن گاه مشتق y=f(ax) کدام است؟

۱) a tanx ۲) tanax ۳) tanx ۴) a tanax

تست۱۶: اگر $\lim\limits_{x \to ۳} \dfrac{f(x) - f(۳)}{x - ۳} = \dfrac{۳}{۲}$ آن گاه مشتق $f(\dfrac{۱}{x})$ در $x = \dfrac{۱}{۳}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{-۲۷}{۲}$ ۲) $\dfrac{۲۷}{۲}$ ۳) $\dfrac{-۱}{۶}$ ۴) $\dfrac{۱}{۶}$

((امام صادق علیه السلام: نماز به وقت، نیکی کردن به پدر و مادر و جهاد در راه خداوند بهترین کارها است.))

تست۱۷: اگر مشتق $f(tgx)$ برابر $\frac{1+tg^2x}{tgx}$ باشد، آن گاه مشتق $f(Sinx)$ کدام است؟

۱) $\cot gx$
۲) $\frac{1+Sin^2x}{Sinx}$
۳) $(1+Sin^2x)Cotgx$
۴) tgx

تست۱۸: هر گاه تابع f فرد باشد و داشته باشیم: $f'(3)=-2$ آنگاه $f'(-3)$ کدامست؟

۱) ۱
۲) ۲-
۳) ۱-
۴) ۲

تست۱۹: اگر $y=\sqrt{2u}-\frac{1}{u}$ و $u=\sin^2x-\cos2x$، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۵

ع)مشتق توابع نمایی و لگاریتم طبیعی: مشتق توابع نمایی با استفاده از فرمول های زیر محاسبه می شوند:

$$\left(e^u\right)'=u'e^u\,,\left(a^u\right)'=u'a^u\ln a\,,\ln|u|=\frac{u'}{u}$$

مثال۱۴: مشتق بگیرید.

$y=e^{3x}+e^x+e^{-x}\Rightarrow y'=$, $y=3^x+2^x\Rightarrow y'=$

$y=\ln x^2+\ln|x+1|\Rightarrow y'=$, $y=xe^{3x^2-1}\Rightarrow y'=$

$y=5^{\frac{x}{2}}\Rightarrow g'(x)=$, $y=\ln\left(7x^2+6\right)\Rightarrow y'=$

غ) مشتق توابع ضمنی: اگر تابع f بر اساس متغیرهای x و y باشد، برای محاسبه مشتق از رابطه $y'_x=\frac{-f'_x}{f'_y}$ استفاده می‌کنیم، که در آن منظور از f'_x مشتق تابع براساس متغیر x است(y را عدد فرض می‌کنیم) و بر عکس این موضوع برای f'_y است.

مثال۱۵: مشتق بگیرید.

$x^2+xy+\sin y+6=0\Rightarrow y'_x=$, $x^3+y^3+e^{xy}=0\Rightarrow y'_x=$

$\sin(xy)+x^2y^2+y=0\Rightarrow y'_x=$

پیامبر اکرم(ص): ((ده صفت در هر که باشد نشان دهنده عقل کامل و انسان سالم است:))

تست۲۰: در نمودار منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۴$ ، در کدام نقطه خط مماس بر نمودار منحنی موازی خط $y=-x$ است؟

۱) $x=۲$ ۲) $x=\sqrt{۲}$ ۳) $x=۴$ ۴) $x=۱$

تست۲۱: در رابطه ضمنی $\sqrt{y}+\sqrt[۴]{y}+\sqrt[۵]{y}=xy^۳$ حاصل $x'(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵۶}{۲۷}$ ۲) $-\frac{۲۷}{۱۵۶}$ ۳) $\frac{۱۶۱}{۲۰}$ ۴) $-\frac{۱۶۱}{۲۰}$

تست۲۲: معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x^{x-۱}$ در نقطهٔ $x=۱$ کدام است؟

۱) $y=x$ ۲) $y=x+۱$ ۳) $x=۱$ ۴) $y=۱$

نکته۷: برای محاسبه مشتق ضمنی راه دوم این است که مشتق x را یک و مشتق y را y' بگیریم و به محاسبه مشتق بپردازیم.

مثال۱۶: مشتق بگیرید. $۲x+y+xy'+y'\cos y=۰\Rightarrow$

کاربردهایی از مشتق

الف)شیب خط مماس: مشتق تابع f را در نقطه $x=a$ همان شیب خط مماس بر این تابع در نقطه $x=a$ می باشد.

نکته۸: برای محاسبه شیب قائم بر منحنی کافی است که شیب خط مماس را عکس و قرینه کنیم.

مثال۱۷: معادله خط مماس و قائم بر تابع $f(x)=(۴x-۳)^۲$ را درنقطه $x=۱$ بیابید.

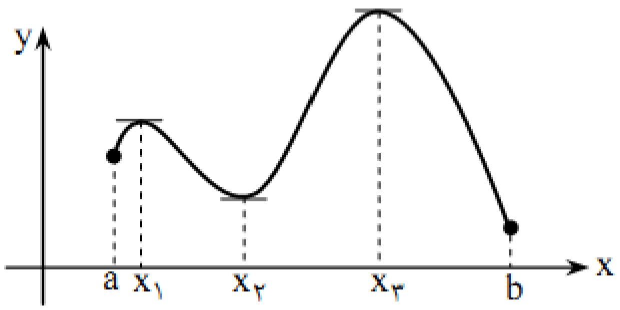
ب)تعیین ماکزیمم و مینیمم نسبی:

تعریف: تابع f با دامنه $[a,b]$ و بازه‌ی I که زیر مجموعه‌ای از آن است را در نظر می‌گیریم. اگر نقطه $x_۰$ از این بازه طوری باشد که به ازای هر نقطه از $[a,b]$ داشته باشیم $f(x_۰)\le f(x)$، در این صورت به $(x_۰,f(x_۰))$ مینیمم نسبی تابع می‌گوییم. همچنین اگر نقطه $x_۰$ از بازه‌ی I طوری باشد که به ازای هر نقطه از نقاط بازه‌ی $[a,b]$ داشته باشیم $f(x_۰)\ge f(x)$، در این صورت به $(x_۰,f(x_۰))$ ماکزیمم نسبی تابع می‌گوییم.

نکته۹: با توجه به تعریف بالا نقاط ابتدایی و انتهایی بازه نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع هستند.

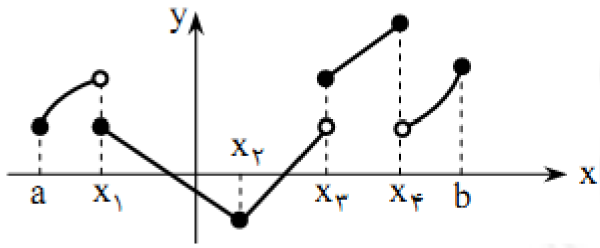
تعریف: تابع f با دامنه $[a,b]$ دامنه و نقطه $x_\circ$ از آن را در نظر می‌گیریم. اگر نقطه $x_\circ$ طوری باشد که به ازای هر نقطه از دامنه تابع داشته باشیم $f(x_\circ)\le f(x)$، در این صورت به $(x_\circ,f(x_\circ))$ مینیمم مطلق تابع می‌گوییم. همچنین اگر نقطه $x_\circ$ طوری باشد که به ازای هر نقطه از دامنه تابع داشته باشیم $f(x_\circ)\ge f(x)$، در این صورت به $(x_\circ,f(x_\circ))$ ماکزیمم مطلق تابع می‌گوییم.

مثال۱۸: ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق را در نمودار مقابل مشخص کنید.



نکته۱۰: به نقاط ماکزیمم و می‌نیمم یک تابع، اکسترمم‌های آن تابع می‌گوییم.

مثال۱۹: اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع مقابل مشخص کنید.



قضیه: اگر تابع f در $x=x_\circ$ اکسترمم نسبی داشته باشد و تابع در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f'(x_\circ)=\circ$.

نکته۱۱: عکس مطلب فوق لزوما درست نمی‌باشد.(یعنی ممکن است مشتق در یک نطقه صفر شود ولی آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد)

نکته۱۲: اگر مشتق تابع f در یک بازه مثبت باشد، تابع در این بازه صعودی و اگر منفی باشد نزولی است.

مثال۲۰: تابع $y=3x^2-2x$ در چه نقاطی صعودی و در چه نقاطی نزولی است؟

نکته۱۳(آزمون مشتق اول): اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد و به ازای $c\in(a,b)$، $f'(c)=\circ$ باشد و تابع مشتق در این نقطه تغییر علامت دهد، آن‌گاه نقطه $(c,f(c))$ یک اکسترمم نسبی تابع است.

((۱. مردم به خیرتان امیدوار باشند. ۲. مردم از شر شما در امان باشند.))

مثال۲۱: اکسترمم‌های نسبی توابع $f(x)=2x^3-6x$, $g(x)=\frac{x^2+1}{x}$ را بیابید.

$f(x)=2x^3-6x\Rightarrow$

x		
y′			
y			

$g(x)=\frac{x^2+1}{x}\Rightarrow$

x		
y′			
y			

ج) تعیین نقاط بحرانی: نقطه درونی c از دامنه تابع f نقطه بحرانی آن نامیده می‌شوند، هرگاه مشتق در آن صفر باشد و یا موجود نباشد.

مثال۲۲: نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

$y=2x^3-6x\Rightarrow$

$f(x)=\frac{x^2}{x+1}\Rightarrow$

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$

$f(x)=\sqrt{x^2-9}$

نکته۱۴: با گرفتن مشتق مجدد از مشتق یک تابع و تکرار این کار به مشتق از مراتب بالاتر می‌رسیم.

نکته۱۵: اگر مشتق دوم یک تابع مثبت باشد، جهت تقعر تابع رو به سمت و اگر منفی باشد، جهت تقعر تابع به سمت پایین است.

د) تعیین نقطه عطف: اگر تابع f در نقطه c از دامنه‌اش دارای مشتق دوم باشد و $f''(c)=0$ باشد، و جهت تقعر تابع در دو سمت این نقطه تغییر کند، نقطه c نقطه عطف آن است.

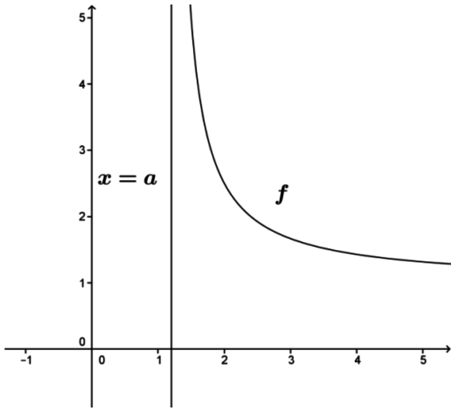
مثال۲۳: توابع $f(x)=x^3-3x+4$, $g(x)=2x^3-6x$ در کجا دارای نقطه عطف و اکسترمم‌های نسبی است؟

$f(x)=-x^3+3x+4\Rightarrow$

x			
y′				
y″				
y				

$g(x)=2x^3-6x \Rightarrow$

x				
y'				
y''				
y				



۵) تعیین مجانب :

۱) مجانب قائم: تابع f را در نظر می‌گیریم. اگر یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیافتد، خط $x=a$ مجانب قائم تابع نامیده می‌شود.

$$\lim_{x\to a^+} f=+\infty \, , \lim_{x\to a^+} f=-\infty \, , \lim_{x\to a^-} f=+\infty \, , \lim_{x\to a^-} f=-\infty$$

نکته۱۶: برای یافتن مجانب‌های قائم یک تابع کسری، کافیست ریشه مخرج کسر را بیابیم، در صورتی ریشه مخرج کسر مجانب قائم است که ریشه صورت نباشد و اگر بود بعد ساده شدن باز هم ریشه مخرج باشد.

نکته۱۷: توابع با برد متناهی مجانب قائم ندارند.

تست۲۳: چند تابع از توابع زیر مجانب قائم دارند؟

الف) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ ب) $y=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ ج) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ د) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست۲۴: کدام‌یک از خطوط زیر معادله مجانب قائم تابع $y=\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{1-\sin x}$ می‌باشد؟

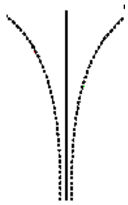
۱) $x=1$ ۲) $x=\dfrac{\pi}{2}$

۳) $x=\dfrac{3\pi}{2}$ ۴) تابع مجانب قائم ندارد.

تست۲۵: تابع $f(x)=\dfrac{1}{2x-[2x]}$ در فاصله $\left[-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right]$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

تست۲۶: اگر $f(x)=\frac{a[x]-1}{3-x}$ در اطراف مجانب قائم خود به صورت زیر باشد حدود a کدام است؟



۱) $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$ ۲) $a>\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}<a<1$

تست۲۷: منحنی $y=\frac{1}{[x]+[-x]}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

تست۲۸: تابع $y=\frac{x^2+1}{x-10\,\mathrm{Sin}x}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) هیچ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) بی‌شمار

تست۲۹: تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x^2+x-1)(x^2+x+1)}$ چند مجانب قائم دارد؟

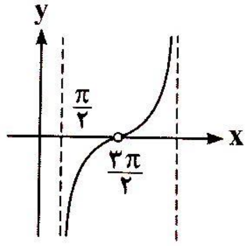
۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

تست۳۰: تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-[x]}$ با دامنه $[0,2]$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

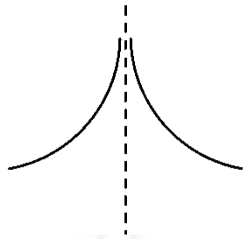
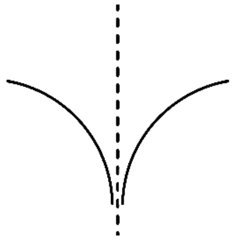
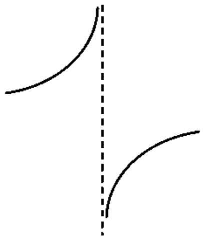
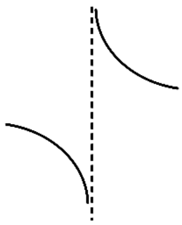
تست۳۱: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\frac{1+a\sin x}{b+\cos x}$ است. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟

۱) $1-\sqrt{3}$ ۲) $2-\sqrt{3}$ ۳) $1+\sqrt{3}$ ۴) $2+\sqrt{3}$



((۳. کار نیک دیگران را زیاد شمارید. ۴. کار خوب خود را کم شمارید گرچه زیاد باشد. ۵. در همه عمر از تحصیل علم خسته نشوید.))

تست۳۲: نمودار تابع $y=\frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

نکته۱۸: در توابع لگاریتمی نظیر $h(x)=\log\frac{f(x)}{g(x)}$، ریشه‌های f و g مجانب‌های قائم تابع هستند، در صورتی که تابع در یک همسایگی از آن‌ها تعریف شده باشد.

تست۳۳: کدام‌یک از توابع زیر مجانب قائم دارد؟

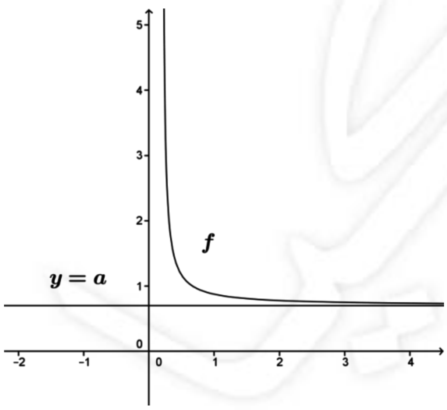
۱) $y=\frac{1}{[x]}$ ۲) $y=\log(x-2)$ ۳) $y=\sin\frac{1}{x}$ ۴) $y=\operatorname{Arccos}\frac{1}{x-1}$

تست۳۴: تابع $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2-x}{x-4}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲) مجانب افقی: تابع f را در نظر می‌گیریم. اگر یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیافتد، خط $y=a$ مجانب افقی تابع نامیده می‌شود.

$$\lim_{x\to+\infty} f=a\,,\ \lim_{x\to-\infty} f=a$$



پس برای یافتن مجانب افقی یک تابع کسری، کافی است حد در بی‌نهایت تابع را محاسبه کنیم.

نکته۱۹: توابع با دامنه متناهی، مجانب افقی ندارند.

تست۳۵: کدامیک مجانب افقی دارد؟

۱) $y=\sqrt{\frac{1-x^2}{x-2}}$ ۲) $y=x+\frac{x}{x-1}$ ۳) $y=\sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$ ۴) $y=\sin^{-1}\left(\frac{|x|}{x+1}\right)$

تست۳۶: کدامیک مجانب افقی دارد؟

۱) $y=\dfrac{x+\sqrt{1-x^4}}{x^5+3}$　　۲) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x}$　　۳) $y=x+\sqrt{x}$　　۴) $y=2x+\sqrt{4x^2-1}$

تست۳۷: نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{2|x|+3}{x-2}$ چند مجانب دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) صفر

تست۳۸: منحنی تابع $y=\dfrac{-\sqrt{-x}}{x^2-1}$ چند خط مجانب دارد؟

۱) ۱　　۲) ۳　　۳) صفر　　۴) ۲

تست۳۹: منحنی تابع $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-5}$ چند مجانب دارد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۴

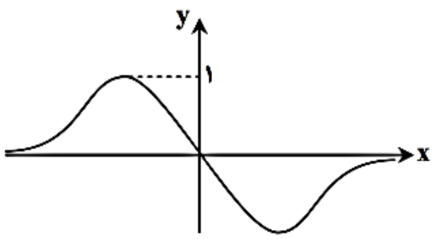
تست۴۰: در صورتی که منحنی تابع $y=\dfrac{\sqrt{ax^2+x+1}}{|x|-2a+4}$ هم مجانب قائم و هم مجانب افقی داشته باشد حدود a کدام است؟

۱) $a\ge\frac{1}{4}$　　۲) $0<a\le 2$　　۳) $a\ge 2$　　۴) $a>0$

تست۴۱: اگر مجانب‌های تابع $y=a+\dfrac{x+1}{ax+b}$ در نقطه $(3,2)$ متقاطع باشند، $a+b$ کدام است؟

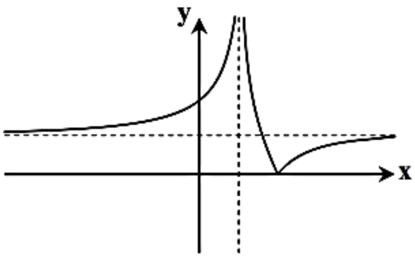
۱) ۲　　۲) -2　　۳) ۳　　۴) -3

تست۴۲: - اگر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^{2}+9}$ به شکل مقابل باشد، مقدار a کدام است؟



۱) ۶
۲) ۹
۳) ۶-
۴) ۹-

تست۴۳: - کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند ضابطه‌ی تابع مقابل باشد؟



۱) $y=\dfrac{|x|-4}{|x|-1}$ ۲) $y=\left|\dfrac{x-1}{x-3}\right|$

۳) $y=\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|$ ۴) $y=\left|\dfrac{x-2}{x^{2}-1}\right|$

۳) مجانب مایل: تابع f را در نظر می‌گیریم. اگر یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیافتد، خط $y=mx+b$ مجانب مایل تابع نامیده می‌شود.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+b))=0,\ \lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+b))=0$$

نکته۲۰: برای یافتن مجانب مایل در توابع کسری، کافیست صورت را بر مخرج کسر تقسیم کنیم. خارج قسمت مجانب مایل را نتیجه می‌دهد. نکته: در توابع رادیکالی نیز از روابط $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)\,,\ m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ مجانب مایل را بدست می‌آوریم.

نکته۲۱: ۱. در حالت کلی شرط وجود مجانب مایل در تابع $y=\sqrt{ax^{2}+bx+c}$، $\sqrt{a}>0$ و $\Delta\neq0$ است.

۲. در توابع $y=mx+h+\sqrt{ax^{2}+bx+c}$ با شرط $a>0,\Delta\neq0$ مجانب مایل تابع خطوط $y=mx+h+\sqrt{a}\left|x+\dfrac{b}{2a}\right|$ احتمالا مجانب‌های مایل تابع هستند. همچنین در توابع $y=mx+h+\sqrt[3]{ax^{3}+bx^{2}+cx+d}$ خط $y=mx+h+\sqrt[3]{a}\left(x+\dfrac{b}{3a}\right)$ احتمالا مجانب افقی تابع می‌باشد.

مثال۲۴: معادله مجانب مایل توابع مقابل را بیابید.

1) $y=2x+\sqrt{x^{2}+3}$

۲) $y=\dfrac{x^{3}+x+1}{x^{2}+3}$

۳) $y=x-\sqrt{x^{2}+2x}$

نکته۲۲: تنها توابع کسری با صورت و مخرج چندجمله‌ای در صورتی مجانب مایل دارند که درجه صورت یک واحد بیشتر از مخرج باشد. در این حالت مجانب مایل از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$y=\frac{ax^{n}+bx^{n-1}+\dots}{cx^{n-1}+dx^{n-2}+\dots}\Rightarrow y=\frac{a}{c}x-\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{c^{2}}$$

مثال۲۵: معادله مجانب مایل تابع $y=\dfrac{3x^{2}+x-1}{x+4}$ را بیابید.

تست۴۴: عرض نقطه تقاطع مجانب‌های منحنی $y=\dfrac{x^{3}}{x^{2}-4x+4}$ کدام است؟

۱) ۲-　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۶

تست۴۵: اگر $y=x+2$ مجانب مایل تابع $y=\dfrac{ax^{2}+bx+c}{x-1}$ باشد، $a-b$ کدام است؟

۱) ۱-　　۲) ۲　　۳) صفر　　۴) ۳-

((۶. از انجام خواسته های مردم خسته نشوید. ۷. گمنامی را بیشتر از شهرت دوست داشته باشید.))

تست۴۶: اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x-\sqrt{ax^2-x+7}$، دارای مجانبی موازی محور x ها باشد، عرض از مبدا مجانب مایل آن کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) 3 ۴) -3

تست۴۷: تابع $f(x)=|x|+\frac{x}{x^2-1}$ دارای:

۱) مجانب افقی است.   ۲) چهار خط مجانب دارد.

۳) دارای دو خط مجانب قائم و یک مجانب مایل است.   ٤) یک مجانب قائم و دو مجانب مایل است.

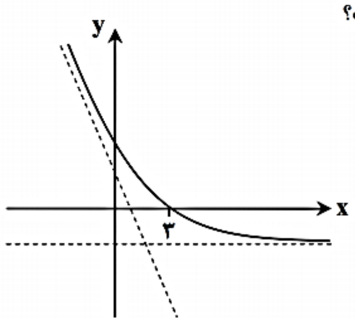
و) رسم نمودار توابع: برای رسم توابع ابتدا در صورت وجود مجانب‌های تابع را می‌یابیم. سپس با استفاده از مشتق اول و دوم نقاط اکسترمم و عطف تابع یافته و با استفاده از جدول تغییرات تابع، به رسم تابع می‌پردازیم.

مثال۲۶: نمودار تابع $y=\frac{x+1}{x-2}$ را رسم کنید.

x				
y'				
y				

مثال۲۷: نمودار توابع زیر را رسم کنید. $y = x^3 - 3x$, $y = \frac{x}{x-1}$

تست۴۸: - قسمتی از نمودار تابع $f(x) = -2bx + \sqrt{x^2 - ax + 1}$ به شکل مقابل است. مقدار ab کدام است؟



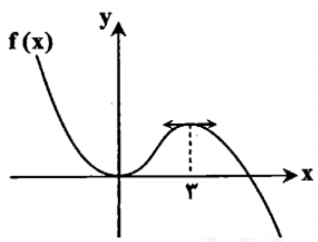
۱) $\frac{1}{9}$

۲) $\frac{1}{6}$

۳) $\frac{1}{12}$

۴) $\frac{1}{18}$

تست۴۹: - اگر نمودار تابع $f(x) = -x^3 + ax^2 + b$ به شکل مقابل باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟



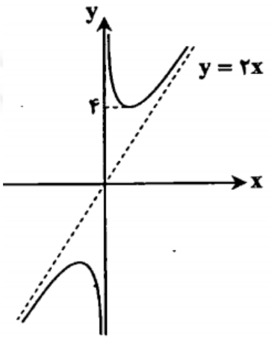
۱) صفر

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۲-

تست۵۰: - اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$ به شکل مقابل باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟



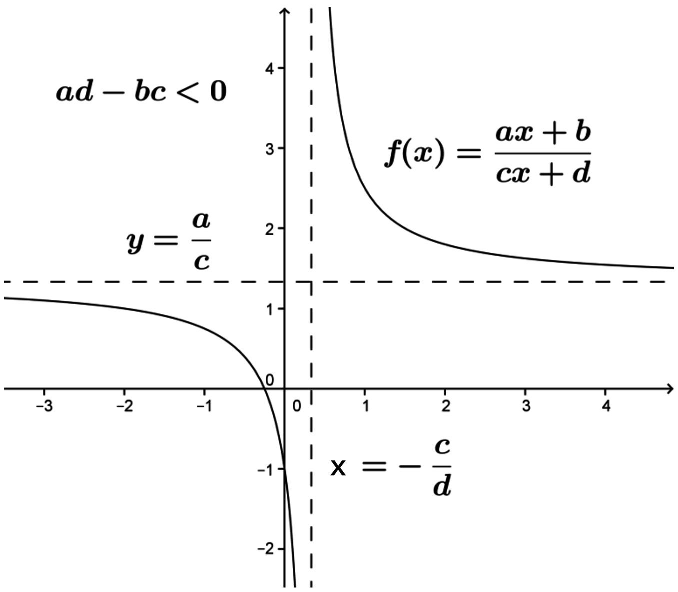
۱) ۲

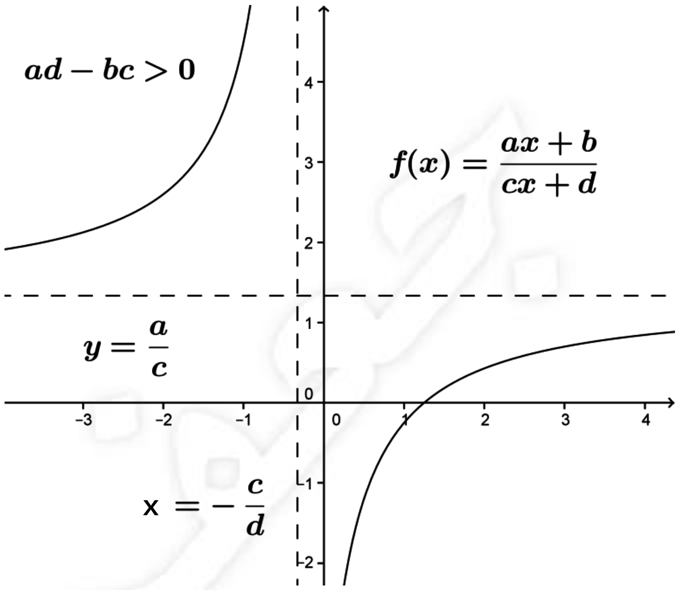
۲) صفر

۳) ۲-

۴) ۴

نکته۲۳: به توابعی به شکل $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ توابع هموگرافیک می‌گوییم. همیشه همه یا قسمتی از این توابع به صورت ضربدری در نواحی یک و سه و یا در نواحی دو و چهار واقعند. مجانب قائم این تابع خط $x=-\frac{c}{d}$ و مجانب افقی آن خط $y=\frac{a}{c}$ می‌باشد. همچنین مرکز این تابع در محل تقاطع دو مجانبش یعنی نقطه $\left(-\frac{c}{d},\frac{a}{c}\right)$ است. این توابع اکسترمم نسبی ندارند و یکنوا هستند.





مثال۲۸: مرکز توابع $y=\frac{x+1}{2x-1}\ ,\ y=\frac{3x}{1-2x}$ را بیابید و سپس مشخص کنید این دو تابع در چه نواحیی واقعند.

تست های کنکور فصل مشتق

آهنگ متوسط تغییر و تعریف مشتق

تست۱: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x+\frac{۱}{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $۲+h$ تغییر کند، برابر $\frac{۸}{۹}$ است. h کدام است؟ (تجربی۸۶)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

تست۲: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax-a & x<۱ \\ x^۲-x & x\geq ۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه‌ی $x=۱$ مشتق‌پذیر است؟ (تجربی۸۶)

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

تست۳: در تابع $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر، روی بازه $[۲/۲۵ , ۲/۵۶]$ از آهنگ آنی، در شروع این بازه، چه‌قدر کمتر است؟ (تجربی۸۷)

۱) $\frac{۱}{۹۳}$ ۲) $\frac{۲}{۹۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳۱}$

تست۴: - آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۱۶}$ نسبت به متغیر x روی بازه $[۰, ۳]$، از آهنگ لحظه‌ای تابع در $x=\sqrt{۲}$، چقدر کمتر است؟ (تجربی۸۸)

1) صفر 2) $\frac{۱}{۱۸}$ 3) $\frac{۱}{۱۲}$ 4) $\frac{۱}{۹}$

تست۵: - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۳۶}{x^۲}$، آهنگ متوسط تابع از $x_۱=۲$ تا $x_۲=۳$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن، در $x=\sqrt[۳]{۱۲}$ بیش‌تر است؟ (تجربی۹۰)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

((۸. فقر در نظرتان بد نباشد. ۹. به یک غذا اکتفا کنید.))

تست۶: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه $x=4$ تا $x=12$، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x=4$، چقدر بیشتر است؟

(تجربی۹۳)

۱) $\frac{7}{540}$ ۲) $\frac{11}{540}$ ۳) $\frac{7}{270}$ ۴) $\frac{11}{270}$

تست۷: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه $x=4$ تا $x=6/25$، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x=4$، چقدر کمتر است؟

(خارج۹۳)

۱) $\frac{1}{36}$ ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{5}{72}$ ۴) $\frac{1}{12}$

تست۸: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیرx، در نقطه‌ی $x=1$ با نموّ متغیر $0/21$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کم‌تر است؟

(تجربی۹۴)

۱) $\frac{1}{42}$ ۲) $\frac{1}{21}$ ۳) $\frac{3}{42}$ ۴) $\frac{2}{21}$

تست۹: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در نقطهٔ $x=1$ با نمو $0/44$، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

(خارج۹۴)

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

خط مماس و قائم

تست۱۰: معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{3}$ واقع بر آن کدام است؟

(تجربی ۸۵)

۱) $y=-\frac{3}{4}$ ۲) $y=\frac{3}{4}$ ۳) $y=-x+\frac{\pi}{3}-1$ ۴) $y=x+\frac{\pi}{3}$

تست۱۱: عرض از مبدأ خط مماس، بر منحنی به معادله $y = \sqrt{x^۲ + ۳x}$ در نقطه $x = ۱$ واقع بر آن کدام است؟

(تجربی۸۷)

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

تست۱۲: - معادله خط قائم بر منحنی $y = \ln(۲x-۵)$ ، در نقطه تلاقی آن با محور xها، کدام است؟

(تجربی۸۸)

1) $x + ۲y = ۳$ 2) $x - ۲y = ۳$ 3) $۲x + y = ۶$ 4) $۲x - y = ۶$

تست۱۳: خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = x^۳ + ۳x^۲ + ۱$، بر خط به معادله‌ی $x - ۳y = ۲$ عمود است. این خط مماس از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

(تجربی۸۹)

۱) $(۱, ۳)$ ۲) $(۱, ۴)$ ۳) $(۲, -۶)$ ۴) $(۲, -۴)$

تست۱۴: - خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $\operatorname{Ln}(x^۲ - y) = \sqrt{y+۱} - x$ ، در نقطه‌ی $(۲,۳)$ نیمساز ناحیه‌ی اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

(تجربی۹۰)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

تست۱۵: عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله $y = \ln\sqrt{\frac{\sin x}{۱+\cos x}}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۲}$ واقع بر آن، کدام است؟

(تجربی۹۲)

۱) $-\frac{\pi}{۴}$ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

تست۱۶: خط قائم بر منحنی $y = xe^{x^{۲}-۴}$، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(خارج۹۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

تست۱۷: خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{۲x}e^{۲-x}$، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

(تجربی۹۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

تست۱۸: عرض از مبداء خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \ln\frac{\sqrt{۴x+۱}}{x^{۲}-۲x+۳}$، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

خارج۹۴

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳}$

تست۶۱: خط به معادله‌ی $y = ۲x - ۵$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی به معادله‌ی $y = ax^{۲} + bx + ۱$ مماس است. a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

مجانب

تست۱۹: فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y = \frac{x - \sqrt{x}}{x^{۲} - ۳x + ۲}$ از مبدأ مختصات کدام است؟

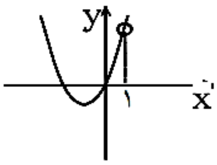
(تجربی۸۵)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۵

تست۲۰: (تجربی۸۷)
منحنی به معادله $y = \sqrt{(a-1)x^2 + ax + 2 - a}$ ، دارای دو خط مجانب است، مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟

۱) $a < 2$ ۲) $a > 0$ ۳) $a > 1$ ۴) $1 < a < 2$

تست۲۱: (تجربی۸۷)
شکل نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \dfrac{4x^3 + ax + b}{x - 1}$ ، دوتایی مرتب (a , b) کدام است؟



۱) $(0 , -4)$ ۲) $(-4 , 0)$
۳) $(-2 , 1)$ ۴) $(4 , 0)$

تست۲۲: (تجربی۸۸)
- نقطه تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $y = 2x - \sqrt{x^2 - 2x}$ ، کدام است؟

1) $(-1, 0)$ 2) $(-1, 1)$ 3) $(1, 2)$ 4) $(1, 3)$

تست۲۳: (تجربی۹۰)
- یکی از مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y = \dfrac{2x^3 + ax^2 + 5}{x^2 + x}$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع می‌کند. a کدام است؟

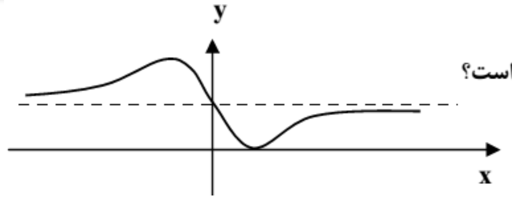
۱) ۳-   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۶

تست۲۴: (تجربی۹۱)
اگر $f(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$ و $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ باشند نقطه تلاقی مجانب‌های تابع fog کدام است؟

۱) $(-1, 0)$ ۲) $(-1, 1)$ ۳) $(-2, 2)$ ۴) $(0, 1)$

تست۲۵: (تجربی۹۴)

شکل روبه رو، نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{ax^2+bx+8}{x^2+4}$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) -7 ۲) -6 ۳) 9 ۴) 10

مشتق ضمنی

تست۲۶: (تجربی۸۵)

از رابطه‌ی $\sin(x-2y)+\sqrt{x-y}-y=0$ ، مقدار مشتق y نسبت به x در نقطه‌ی $(2,1)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

تست۲۷: (تجربی۸۶)

از رابطه‌ی $\frac{\sqrt{y}}{x}+y\sqrt{x}=6$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه‌ی $(1,4)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 0 ۴) $\frac{1}{2}$

تست۲۸: (تجربی۹۳)

در تابع ضمنی $4\sqrt{xy}+\frac{1}{y}-2x=1$، تابع y بر حسب متغیر x منظور شده است. معادله خط مماس بر منحنی آن در نقطه $(4,1)$، کدام است؟

۱) $y+2x=9$ ۲) $2y-x=-2$ ۳) $3y+x=7$ ۴) $3y-x=-1$

نقاط بحرانی و اکسترمم

تست۲۹: (تجربی۸۵)

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) فقط متساوی‌الساقین

۳) فقط قائم‌الزاویه ۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

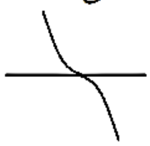
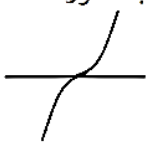
تست۳۰: (تجربی۸۵)
ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{۱}{x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ + ۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

تست۳۱: (تجربی۸۶)
می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۳}{۳} - x^۲$ روی بازه‌ی $[-۱ , ۳]$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱۰}{۳}$ ۳) $-\frac{۸}{۳}$ ۴) $-\frac{۷}{۳}$

تست۳۲: (تجربی۸۶)
نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^۴ - ۳x^۳ + ۳x^۲ - x$ در نقطه‌ی $x = ۱$ کدام وضع را با محور x ها دارد؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

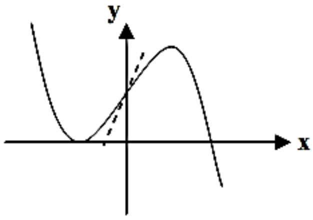
تست۳۳: (تجربی۸۷)
بیشترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = \sin ۲x + ۲\cos x$ کدام است؟

۱) $۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $۱ + \sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

تست۳۴: (تجربی۸۷)
طول نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^{\frac{۵}{۳}} - ۱۰x^{\frac{۲}{۳}}$، کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۲ و ۰ ۳) ۲ ۳) ۲ و ۰

((ا. همه را از خود بهتر بدانید.))



تست۳۵: (تجربی۸۸)

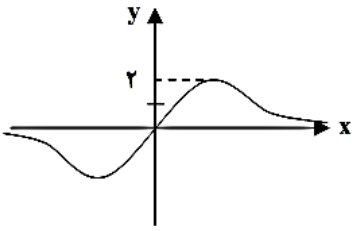
۱- شکل مقابل، نمودار تابع $y=-x^{3}+ax^{2}+bx+2$ است. زوج مرتب (a,b) کدام است؟

1) $(0,-3)$
2) $(1,-2)$
3) $(0,3)$
4) $(0,6)$

تست۳۶: (تجربی۸۸)

- تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=6x^{5}+2x+7$ در بازه $(a,+\infty)$ رو به بالا است، کمترین مقدار a کدام است؟

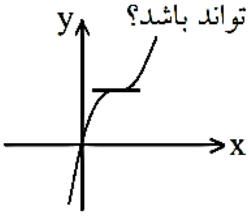
1) -1
2) صفر
3) $\frac{1}{2}$
4) 1



تست۳۷: (تجربی۸۸)

- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{ax+b}{x^{2}+1}$ است. a کدام است؟

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4



تست۳۸: (تجربی۸۹)

شکل مقابل، نمودار تابع $y=x^{3}+ax^{2}+bx$ است. دوتایی (a,b) به کدام صورت می‌تواند باشد؟

۱) $(-3,4)$
۲) $(-1,3)$
۳) $(-6,12)$
۴) $(3,2)$

تست۳۹: (تجربی۸۹)

در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=a\cos 2x+b\sin x$، اگر نقطه‌ی می‌نیمم آن در $\left(\frac{\pi}{6},-3\right)$ باشد، a کدام است؟

۱) -4
۲) -2
۳) -1
۴) 1

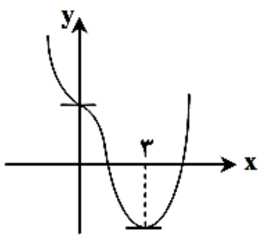
تست۴۰: مجموعه‌ی طول نقاطی که در آن‌ها تقعر منحنی به معادله‌ی $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ رو به پایین باشد، به کدام صورت است؟
(تجربی۸۹)

۱) $-2 < x < 0$ ۲) $-1 < x < 2$ ۳) $0 < x < 1$ ۴) $0 < x < 2$

تست۴۱: - طول نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y = \frac{x}{1+|x|}$، کدام است؟
(تجربی۹۰)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) فاقد نقطه‌ی عطف

تست۴۲: - شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + 2$ است. $a+b$ کدام است؟
(تجربی۹۰)

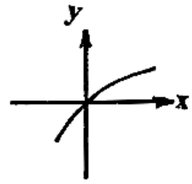
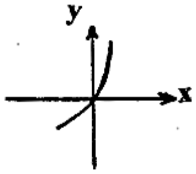
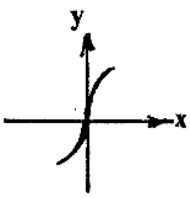
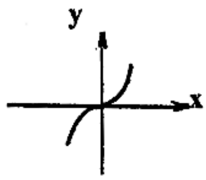


۱) ۱-
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

تست۴۳: منحنی نمایش تابع $y = -x^4 + 4x^3 - 3$، در کدام بازه صعودی و تقعر آن روبه پایین است؟
(تجربی۹۱)

۱) $(2\ ,\ 3)$ ۲) $(0\ ,\ 2)$ ۳) $(0\ ,\ 3)$ ۴) $(2\ ,\ +\infty)$

تست۴۴: نمودار تابع $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ در حوالی مبداء مختصات چگونه است؟
(تجربی۹۱)

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

امام علی(علیه السلام): ((دو چیز است که قدر و قیمتش را نمی شناسد مگر کسی که آن دو را از دست داده باشد، یکی «جوانی» و دیگری «تندرستی و عافیت»))

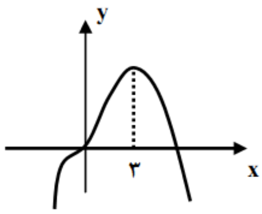
تست۴۲: **بیشترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$، در بازه‌ی $[-2,2]$، کدام است؟**

(تجربی۹۲)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۷

تست۴۳: شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = ax^4 + 2x^3 + bx^2$ است. a کدام است؟

(تجربی۹۲)



۱) -1

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $-\frac{1}{4}$

۴) $\frac{1}{4}$

تست۴۴: **تقعر منحنی به معادله $y = x\sqrt{x^2 + 2}$ در بازه‌ی $(a, +\infty)$ رو به بالا است، کمترین مقدار a ، کدام است؟**

(تجربی۹۲)

۱) صفر ۲) -1 ۳) ۱ ۴) $-\infty$

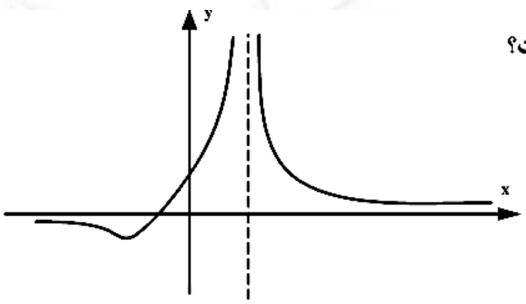
تست۴۵: **در کدام بازه تابع با ضابطه $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2$، نزولی و تقعر نمودار آن، رو به بالا است؟**

(تجربی۹۳)

۱) $(1,3)$ ۲) $(1,4)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(0,3)$

تست۴۶: شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{x+a}{x^2+bx+4}$ است. مقادیر a و b، چگونه است؟

(تجربی۹۳)



۱) $b = 4, a < 0$

۲) $b = -4, a < 0$

۳) $b = 4, a > 0$

۴) $b = -4, a > 0$

تست۴۷: در کدام بازه تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-3x^2$، صعودی و تقعر نمودار آن، رو به پایین است؟

(خارج۹۳)

۱) $(-2,0)$ ۲) $(-2,1)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(0,1)$

تست: اگر تابع‌هایی به صورت $f(x)=x^3-(m+2)x^2+3x$، همواره صعودی باشند، آن‌گاه مجموعه طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟

تجربی۹۴

۱) $[-2,0]$ ۲) $[-2,2]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[0,1]$

تست: اگر تابع‌هایی به صورت $f(x)=\frac{2}{3}x^3-(m-1)x^2+8x$، دارای ماکزیمم و می‌نیمم با طول‌های منفی باشند. آنگاه مجموعه طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟

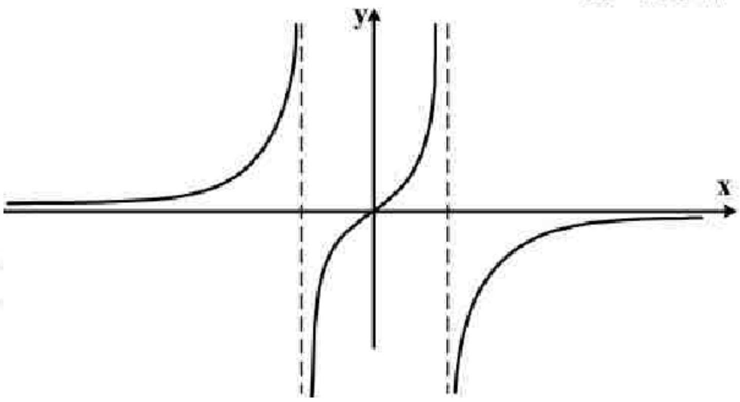
(خارج۹۴)

۱) $(-5,-\frac{1}{2})$ ۲) $(-4,-1)$ ۳) $(-\infty,-2)$ ۴) $(-\infty,-4)$

تست: شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{ax^2+bx+1}$ است. مقادیر a و b چگونه است؟

خارج۹۴

۱) $a<0, b=0$
۲) $a>0, b=0$
۳) $a>0, b=1$
۴) $a<0, b=1$



فرمول‌های مشتق

تست۴۸: اگر $f(x)=\sqrt{2\sin \pi x^2}$ ، آن‌گاه $f'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ کدام است؟
(تجربی ۸۵)

۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$
۲) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$
۳) $\pi\sqrt{2}$
۴) $\pi\sqrt{3}$

تست۴۹: مقدار مشتق تابع $y=tg^3x - Cotg\,2x$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{6}$ کدام است؟
(تجربی۸۶)

۱) $\frac{4}{3}$
۲) ۲
۳) $\frac{8}{3}$
۴) ۴

تست۵۰: در تابع با ضابطه $f(x)=|x|\,.\,[x]$ ، مقدار $f'(0^-)-f'(0^+)$ ، کدام است؟
(تجربی۸۷)

۱) ۱-
۲) ۰
۳) ۱
۴) ۲

تست۵۱: - $y=\sqrt{2U}-\frac{1}{U}$ و $U=Sin^2x-Cos^2x$ ، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟
(تجربی۸۸)

1) 9
2) 10
3) 12
4) 15

تست۵۲: اندازه‌ی مشتق تابع $y=\frac{1-tg\,2x}{1+tg\,2x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{8}$ کدام است؟
(تجربی۸۹)

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

تست۵۳: - مقدار مشتق تابع $y=Cos^2(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4})$ ، به‌ازای $x=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟
(تجربی۹۰)

۱) $-\frac{1}{4}$
۲) $-\frac{1}{8}$
۳) $\frac{1}{8}$
۴) $\frac{1}{4}$

تست۵۴: - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x\sqrt{x}+|x-1|$، مقدار $f'_+(1)+3f'_-(1)$ کدام است؟
(تجربی۹۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

تست۵۵: مقدار مشتق $\frac{1-\cos^2 x}{2-\sin^2 x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟
(تجربی۹۱)

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{7}{9}$ ۴) $\frac{8}{9}$

تست۵۶: مشتق تابع $y=2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)$، به ازای $x=\frac{\pi}{3}$، کدام است؟
(تجربی۹۳)

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{8}$

تست۵۷: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x-\cos 2x & ; \quad 0<x\leq\frac{\pi}{4}\\ a\tan x+b\sin 2x & ; \quad \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$، در نقطه $x=\frac{\pi}{4}$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟
(تجربی۹۳)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

تست۵۸: مشتق $y=\sin^3\sqrt{2x}$، به ازای $x=\frac{\pi^2}{18}$، کدام است؟
(خارج۹۳)

۱) $\frac{9}{8\pi}$ ۲) $\frac{9}{4\pi}$ ۳) $\frac{27}{8\pi}$ ۴) $\frac{27}{4\pi}$

تست۵۹:
(خارج۹۳)

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x}-5 & ; \quad x\geq 1\\ x^2+ax+b & ; \quad x<1\end{cases}$، در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست۶۰:
(خارج۹۴)

اگر $f(x)=x^3-[2x^2]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2})-f'_-(\sqrt{2})$، کدام است؟

۱) ۲− ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) ۲

تمرینات کتاب

در مسایل ۱ تا ۵ نقاط بحرانی توابع داده شده را به‌دست آورید.

۱ـ $f(x)=2x^3-9x^2+12x+60$

۲ـ $g(x)=2x^3-2x^2-16x+1$

۳ـ $g(x)=x^{\frac{6}{5}}-12x^{\frac{1}{5}}$

۴ـ $f(x)=(x^3-3x^2+4)^{\frac{1}{3}}$

۵ـ $f(x)=x^{\frac{7}{6}}-\frac{7}{2}x^{\frac{2}{3}}+5$

در مسایل ۶ تا ۱۱ مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق توابع مفروض بر بازه داده شده را درصورت وجود محاسبه کنید.

۶ـ $g(x)=x^4-8x^2+16 \quad ; \quad [-1,4]$

۷ـ $f(x)=x^3+5x-4 \quad ; \quad [-3,-1]$

۸ـ $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad [-2,1]$

۹ـ $f(x)=1-(x-3)^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad [-5,4]$

۱۰ـ $f(x)=x^{\frac{7}{6}}-\frac{7}{2}x^{\frac{2}{3}}+5 \quad ; \quad [0,64]$

۱۱ـ $f(x)=2x^3-9x^2+12x+60 \quad ; \quad [-2,3]$

در تمرین‌های ۱ تا ۴ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی توابع داده شده را به‌دست آورید.

۱ـ $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 30$

۲ـ $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 10$

۳ـ $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 100$

۴ـ $y = x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 100$

۵ـ در تمرین‌های ۱ تا ۴، آیا توابع داده شده دارای ماکزیمم یا می‌نیمم مطلق هستند؟ چرا؟

۶ـ ثابت کنید تابع $y = x^3$ همواره صعودی است و از آنجا نتیجه بگیرید که این تابع ماکزیمم و می‌نیمم ندارد.

۷ـ در تابع $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 30$ ثابت کنید پاره خطّی که نقاط ماکزیمم و می‌نیمم روی نمودار تابع را به هم وصل می‌کند توسّط منحنی نمایش تابع به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود.

۸ـ ضرایب ثابت a و b را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ در $(2, 3)$ یک ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی داشته باشد.

۹ــ ضرایب a، b و c را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطهٔ $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ در $x = ۱$ دارای مقدار ماکزیمم نسبی ۷ باشد و نمودار تابع $y = f(x)$ از نقطهٔ $(۲, -۲)$ بگذرد.

۱۰ــ تابع $f(x) = x^{۲n+۱}$ مفروض است که در آن n یک عدد صحیح و مثبت است، ثابت کنید که این تابع صعودی است و از آنجا نتیجه بگیرید که ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ندارد.

۱۱ــ تابع $y = x^{۲n}$ مفروض است که در آن n یک عدد صحیح و مثبت است، ثابت کنید که این تابع در $x = ۰$ دارای یک می‌نیمم مطلق است.

در مسایل ۱ تا ۵، تعیین کنید که در چه بازه‌ای تقعّر منحنی تابع داده شده رو به بالا است، در چه بازه‌ای تقعر آن رو به پایین است، و نقاط عطف را نیز درصورت وجود به‌دست آورید.

۱ــ $y = ۱۶x^{۴} + ۳۲x^{۳} + ۲۴x^{۲} - ۵x - ۲۰$

۲ــ $y = x^{۴} - ۸x^{۳} + ۲۴x^{۲}$

۳ــ $y = \frac{x}{x^{۲} - ۱}$

۴ــ $y = \frac{۱}{۱۲}x^{۴} + \frac{۱}{۶}x^{۳} - x^{۲}$

۵ــ $y = x^{۳} + ۳x^{۲} - ۳x + ۳$

۶ـ نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی و نقطهٔ عطف منحنی نمایش تابع $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 10$ را به‌دست آورید. ثابت کنید که این سه نقطه بر یک استقامت هستند و نقطه عطف وسط پاره‌خطّ واصل بین نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی است.

۷ـ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$، ضرایب a، b، c و d را چنان تعیین کنید که این تابع در $(0,3)$ دارای یک ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی باشد و منحنی نمایش آن در $(1, -1)$ یک نقطهٔ عطف داشته باشد.

۸ـ اگر $y = ax^3 + bx^2$، ضرایب ثابت a و b را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش این تابع در نقطهٔ $(1,2)$ دارای یک نقطهٔ عطف باشد.

۹ـ طول نقاط عطف یک منحنی به معادلهٔ $y = (x^2 - 7x + 14)e^x$ را بدست آورید.

منحنی نمایش توابع زیر را رسم کنید.

۱ـ $y = x^3 + 4x^2 - 3x + 10$

۲ـ $y = x^4 + x^2 + 1$

۳ـ $y = \dfrac{2x - 3}{3x - 5}$

۴ـ $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

۵ـ $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

۶ـ $y = \sqrt{x^2 - 1}$

۷ـ $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x - 1}}$